正確確率検定　Exact test

青木繁伸

2005 年 10 月 17 日

目次

第 1 章

クロス集計表としてまとめられたデータの取り扱い

1.1　2×2 分割表の場合

表 1.1 に示すような 2×2 分割表は，1.1.1 および 1.1.2 に示すような 2 通りの調査で得られる。

見かけ上はいずれの調査法で得られたものかは分からないが，概念的には異なることを理解しておくべきである[*1]。

表 1.1　2×2 分割表の例と記号法

	虫歯		
甘いもの	あり	なし	合計
好き	13	4	17
嫌い	6	14	20
合計	19	18	37

	要因 B		
要因 A	B_1	B_2	合計
A_1	a	b	e
A_2	c	d	f
合計	g	h	n

1.1.1　全標本の大きさを規定する調査から得られる 2×2 分割表

たくさんの項目を含むアンケート調査などを行う場合，最初に対象者の人数を決めてから調査することが多い。集められたデータを 2 変数について分類集計することによって得られる分割表である。

例えば，100 人の対象者について調査し，“性別” と “自動車運転免許の有無” の 2 変数について，得られたデータをクロス集計する。このクロス集計表は，2 変数が独立であるかどうか，すなわち，性別と運転免許の有無というのが無関係かどうかという観点から吟味する。このようにして得られた分割表に対しては **2 変数の独立性の検定**を行うことになる。

1.1.2　各群の標本の大きさを規定する調査から得られる 2×2 分割表

前節の “全標本の大きさを規定する” 調査方法から得られるデータには，いくつかの問題がある。場合によっては，調査した 100 人の中に自動車運転免許を持っている者が一人もいないことや，全員が男性（女性）であるということさえありうる。そこまで行かなくても，男女の比率が著しく異なることもありうる。

統計学的にいえば，全体で 100 人について調査を行うなら，2 群に等しく 50 人ずつ割り当てるほうが精度は高

[*1] 以下に示すが，検定手法の原理上からは，両者に区別はない。しかし，また一方で，用いられる検定手法が異なる（ように見える）ことから，両者に本質的な違いがあると誤解されていることもあるようである。

い。そこで，今の場合は，男性，女性それぞれ 50 人に “自動車運転免許の有無” を調査し，得られたデータを 男女別に免許の有無により 2 分類する[*2]。

この場合にも結果的には 2×2 分割表の形式にまとめられる。しかしこのクロス集計表は，2 群の比率に差があるかどうか，すなわち，男女で運転免許の保有率に差があるかどうかという観点から吟味する。このようにして得られた分割表に対しては **2 群の比率の差の検定** を行うことになる。

1.2　$2 \times m$ 分割表の場合

$2 \times m$ 分割表の形でまとめられるデータがどのような素性を持つかは，さらに多くの可能性がある。

1.2.1　m 個のカテゴリーに順序関係がない場合

m 個のカテゴリーに順序関係がない場合には 3 つの可能性がある。

まず，m 個のカテゴリーに対する分布を考えて，2 群の分布に差があるかどうかを吟味すべき場合である。例えば，ある疾患を持つ患者と健康人の 2 群を考え，ABO 式血液型（4 カテゴリー）の割合に差があるかというような場合である。この場合には，**分布の差の検定** を行う。

次に，m 個のカテゴリーを群と考えた場合には，2 つのカテゴリーの片方を持つ比率に差があるかどうかを吟味すべき場合である。例えば，職種別に喫煙率に差があるかどうかというような場合である。この場合には，m 群の **比率の差の検定** を行うことになる。

以上のふたつの見方は，2 カテゴリーの方を群と見るか m カテゴリーの方を群と見るかだけの違いであり，群ごとの比率に差が見られるかどうかという点では同じである。

みっつ目は，2 変数が独立かどうかという見方も可能である。先に述べたふたつの例についてみれば，“疾患の有無と血液型は独立であるか”，とか，“職種と喫煙は独立であるか” という見方である。この場合は，**独立性の検定** を行うことになる。

1.2.2　m 個のカテゴリーに順序関係がある場合

順序関係の情報を有効に利用するための手法としては，**2 群の代表値の差の検定** がある。

2 群の代表値の差の検定を行う場合に，順序尺度変数を対象にする場合には同順位はかなり多くなる。このような場合，データは $2 \times m$ 分割表の形式で表現するほうが適切である（m 個の異なった測定値が得られたとする）。原データをそのまま使用して検定を行うこともできる[*3]が，$2 \times m$ 分割表にまとめられたデータを用いたほうが，計算は若干簡単になる[*4]。

連続変数（間隔尺度変数，比尺度変数）を対象にする場合には通常は同順位がないか，もし同順位があってもごく少数である。通常は，原データをそのまま使用して検定を行う。しかし，データ数が小さい場合は表 1.2 のデータを用いて通常の検定を行うのは不適切である。そのような場合には，表 1.3 のようにまとめて分割表に基づく検定を行うことにより，正確な有意確率を得ることができる。

表 1.2　連続変数の原データ

第 1 群の観察値	1.2，1.5，1.8，2.6
第 2 群の観察値	1.3，1.9，2.9，3.1，3.9

[*2] いずれかの周辺和が等しい場合でなければ各群の標本の大きさを規定する調査から得られた 2×2 分割表ではないと判断すればいいかというとそうではない。当然，欠損値（不明）があることもあるので，2 群で同数ずつのデータが得られるとは限らないからである。
[*3] 同順位を補正した検定を行わなければならない。
[*4] 間隔尺度・比例尺度の場合にカテゴリー化は不要である。カテゴリー化した場合には，検出力が低下する。

表 1.3　分割表の形式で表したデータ

	1.2	1.3	1.5	1.8	1.9	2.6	2.9	3.1	3.9	合計
第 1 群	1	0	1	1	0	1	0	0	0	4
第 2 群	0	1	0	0	1	0	1	1	1	5
合計	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9

1.3　$k \times m$ 分割表の場合

$k \times m$ 分割表の形でまとめられるデータは $2 \times m$ 分割表の場合の拡張である。カテゴリー数が 2 個の場合には何らかの方向性が常に仮定できる[*5]が，複数個のカテゴリーの場合にはそこに順序関係があるかどうかが検定手法の選択に関係してくるので $2 \times m$ 分割表の場合よりは場合分けが多くなる。

1.3.1　k および m 個のカテゴリーの両方ともに順序関係がない場合

まず，m 個のカテゴリーに対する分布を考えて，k 群の分布に差があるかどうかを吟味すべき場合には，**分布の差の検定** を行うことになる。例えば，k 種類の疾患を持つ患者群において，ABO 式血液型（4 カテゴリー）の割合に差があるかというような場合である。

次に，2 変数が独立かどうかという見方も可能である。この場合は，**独立性の検定** を行うことになる。例えば，疾患の種類と血液型は独立であるかという見方である。

1.3.2　k あるいは m 個のカテゴリーのいずれかに順序関係がある場合

この場合には，順序関係の情報を利用する **代表値の差の検定** を用いる。

これは，1.2.2 での “2 群” を “k 群” に拡張しただけである。検定手法としては，2 群の比較には **マン・ホイットニーの U 検定** が用いられるのに対して，k 群の場合にはそれを拡張した **クラスカル・ウォリス検定** が用いられるという対応がある。

1.3.3　k および m 個のカテゴリーの両方ともに順序関係がある場合

この場合の分割表は特に相関表と呼ばれることが多いであろう。

この種のデータは，2 変数間の **順位相関係数** を求めその有意性を検定するのがよいであろう。または，分割表に基づく各種の **関連性係数** を求めることもできる。なお，これらの関連性係数の多くは独立性の検定に用いられる χ^2 統計量から導かれることに注意しておこう。従って，関連性係数の有意性の検定は，独立性の検定と等価であることになる[*6]。

連続変数の場合には，ピアソンの積率相関係数を求めその有意性を検定することになる。

[*5] “どちらが好ましいか” などという場合も含めて。

[*6] 関連性係数は，分割表の 2 変数が名義尺度であっても定義できる。このことを考えてみれば，独立性の検定として行われる，通称 χ^2 検定 は，分割表のカテゴリーが順序を持っているときには不十分な検定手法であるということがわかる。

第 2 章

クロス集計表としてまとめられたデータの検定

2.1　2×2 分割表の場合

表 1.1 に示すような 2×2 分割表の出処が 2 通りあり，1.1.1 の場合は “2 変数の独立性の検定” を行い，1.1.2 においては “2 群の比率の差の検定” を行うと書いた[*1]。

読者の中には，**見かけは全く同じ形式でまとめられた 2×2 分割表なのに，調査法によって適用する検定手法が異なる** ということに疑問を持つかも知れない。しかし，以下に示すように，“2 変数の独立性の検定” と “2 群の比率の差の検定” は全く等価な検定なのである。

2.1.1　2×2 分割表における独立性の検定

2 変数の独立性の検定は以下のように行う。

帰無仮説 H_0: 「2 変数は独立である（関連がない）」

対立仮説 H_1: 「2 変数は独立ではない（関連がある）」

有意水準 α で検定を行う。

2×2 分割表では関連の方向性を決めることができるので，片側検定を行うこともできる[*2]。

1. χ^2 **検定**

   表 1.1 のような 2×2 分割表における χ^2 検定は，（2.1）式による。

$$\chi_0^2 = \frac{n\,(a\,d - b\,c)^2}{e\,f\,g\,h} \tag{2.1}$$

2. **連続性の補正**

   分割表から得られる χ_0^2 は跳び跳びの値しかとらない。一方，χ^2 分布は連続分布である。そのため，連続性の補正をしたほうがよい。連続性の補正のしかたには幾通りかあるが，（2.2）式による **イェーツの補正** が一般的である。

$$\chi_0^2 = \frac{n\,(|a\,d - b\,c| - n\,/\,2)^2}{e\,f\,g\,h} \tag{2.2}$$

   ただし，$|a\,d - b\,c| < n\,/\,2$ のときは，$\chi_0^2 = 0$ とする。

連続性の補正をする場合も，しない場合も，各計算式で求められる χ_0^2 の値に基づいて，有意確率を $P_0 = \Pr\{\chi^2 \geq$

[*1] 疫学などにおいては 3 通りあると考える。“前向き調査”，“後向き調査” のデータの解析は比率の差の検定，“断面調査” のデータの解析は独立性の検定ということになる。

[*2] $k \times m$ 分割表では必ず両側検定である。片側検定は理論上あり得ない。

$\chi_0^2\}$ としたとき[*3]，以下のような基準に従って検定結果を述べる。

- $P_0 > \alpha$ のとき，帰無仮説を採択する。「2 変数は独立である（関連がない）」。
- $P_0 \leq \alpha$ のとき，帰無仮説を棄却する。「2 変数は独立ではない（関連がある）」。

表 1.1 の例を解析してみよう。

まず，連続性の補正をしない場合には（2.1）式から，

$$\chi_0^2 = \frac{37\,(13 \cdot 14 - 4 \cdot 6)^2}{17 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} = 7.94 \tag{2.3}$$

有意確率は $P_0 = \Pr\{\chi^2 \geq 7.94\} = 0.0048261$ となり，帰無仮説は棄却される。

次に，連続性の補正をした場合には（2.2）式から，

$$\chi_0^2 = \frac{37\,(|13 \cdot 14 - 4 \cdot 6| - 37/2)^2}{17 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} = 6.19 \tag{2.4}$$

有意確率は $P_0 = \Pr\{\chi^2 \geq 6.19\} = 0.0128314$ となり，やはり帰無仮説は棄却される。

2.1.2　2×2 分割表における 2 群の比率の差の検定

2 群の比率の差の検定は以下のように行う。

帰無仮説 H_0:「2 群の比率に差はない」

対立仮説 H_1:「2 群の比率に差がある」

有意水準 α で両側検定を行う（片側検定も定義できる）。

1. 比率の差の検定

　表 1.1 において，変数 A が “群” を表し，変数 B が “ある特性を持つか持たないか” を表すことにしよう。第 1 群のケース数は e，ある特性を持つものの数（陽性数と呼ぶことにする）は a，第 2 群のケース数は f，陽性数は c とする。各群の比率を $p_1 = a\,/\,e$，$p_2 = c\,/\,f$ とする。2 群をプールした全標本中の陽性数の比率 p は，

$$p = \frac{a+c}{e+f} = \frac{g}{n} \tag{2.5}$$

である。

　（2.6）式で計算される検定統計量 Z_0 は，正規分布に従う。

$$Z_0 = \frac{|\,p_1 - p_2\,|}{\sqrt{p\,(1-p)\,(1\,/\,e + 1\,/\,f)}} \tag{2.6}$$

2. 連続性の補正

　分割表から得られる Z_0 は跳び跳びの値しかとらない。一方，正規分布は連続分布である。そのため，（2.7）式により連続性の補正をしたほうがよい。

$$Z_0 = \frac{|\,p_1 - p_2\,| - 0.5\,(1\,/\,e + 1\,/\,f)}{\sqrt{p\,(1-p)\,(1\,/\,e + 1\,/\,f)}} \tag{2.7}$$

　　ただし，$|\,p_1 - p_2\,| < 0.5\,(1\,/\,e + 1\,/\,f)$ のときは，$Z_0 = 0$ とする。

　Z_0 は，正規分布に従う。

連続性の補正をする場合も，しない場合も，各計算式で求められる Z_0 値に基づいて，有意確率を $P_0 = \Pr\{Z \geq Z_0\}$ としたとき，以下のような基準に従って検定結果を述べる。

[*3] 統計数値表から該当する有意水準に対応するパーセント点を求めてその値と計算された統計量の大小関係で有意性を判定することもできる。

- $P_0 > \alpha$ のとき，帰無仮説を採択する。「比率に差はない」。
- $P_0 \leq \alpha$ のとき，帰無仮説を棄却する。「比率に差がある」。

表 1.1 の例を解析してみよう。$p_1 = 13/17 = 0.7647$，$p_2 = 6/20 = 0.3$，$p = 19/37 = 0.5135$ である。
まず，連続性の補正をしない場合には（2.6）式から，

$$Z_0 = \frac{|0.7647 - 0.3|}{\sqrt{0.5135\,(1 - 0.5135)\,(1\,/\,17 + 1\,/\,20)}} = 2.82 \tag{2.8}$$

有意確率は $P_0 = \Pr\{Z \geq 2.82\} = 0.0048261$ となり，帰無仮説は棄却される。
次に，連続性の補正をした場合には（2.7）式から，

$$\chi_0^2 = \frac{|0.7647 - 0.3| - 0.5 \cdot (1/17 + 1/20)}{\sqrt{0.5135\,(1 - 0.5135)\,(1\,/\,17 + 1\,/\,20)}} = 2.49 \tag{2.9}$$

有意確率は $P_0 = \Pr\{Z \geq 2.49\} = 0.0128314$ となり，やはり帰無仮説は棄却される。

2.1.3　“独立性の検定” と “2 群の比率の差の検定”

“独立性の検定” からは（2.1），（2.2）式のように，自由度 1 の χ^2 分布にしたがう検定統計量 χ_0^2 が得られる。一方，“2 群の比率の差の検定” からは（2.6），（2.7）式の正規分布にしたがう検定統計量 Z_0 が得られる。

両者には，$\chi^2 = Z^2$ の関係があり，それから得られる有意確率は全く等しくなる（連続性の補正をしないとき $P_0 = 0.0048261$，連続性の補正をするとき $P_0 = 0.0128314$）。

以上のことから，2 種類の検定法は全く等価なものであることがわかる。

2.2　$2 \times m$ 分割表の場合

2.2.1　m 個のカテゴリーに順序関係がない場合

$2 \times m$ 分割表に対しては，“分布の差の検定”，“比率の差の検定”，“独立性の検定” を行うことになると書いたが，実は，それらは全て ‘独立性の検定” と同じものである。

独立性の検定は，$k \times m$ 分割表に一般化して 2.3.1 で解説する。

2.2.2　m 個のカテゴリーに順序関係がある場合

2 群の代表値の差の検定として，マン・ホイットニーの U 検定をとりあげよう。

原データを用いる方法

帰無仮説 H_0:「2 群の代表値に差はない」
対立仮説 H_1:「2 群の代表値に差がある」
有意水準 α で両側検定を行う（片側検定も定義できる）。
表 1.2 のデータ例に対して検定を行ってみよう。2 群をこみにして観察値を小さい順に並べ，小さい方から順位をつける。同順位がある場合には平均順位をつける。

表 2.1　マン・ホイットニーの U 検定の計算例

観察値	1.2	1.3	1.5	1.8	1.9	2.6	2.9	3.1	3.9
順位	1	2	3	4	5	6	7	8	9
群別	1	2	1	1	2	1	2	2	2

まず，各群ごとに，付けられた順位の和を求める。

第 1 群に属する観察値に付けられた順位の和　$R_1 = 1 + 3 + 4 + 6 = 14$
第 2 群に属する観察値に付けられた順位の和　$R_2 = 2 + 5 + 7 + 8 + 9 = 31$

次に，検定統計量を求める。2 群のケース数をそれぞれ n_1，n_2，また，$n = n_1 + n_2$ とする。

$$
\begin{aligned}
U_1 &= n_1\, n_2 + n_1\, (n_1 + 1) \,/\, 2 - R_1 && (2.10)\\
&= 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \,/\, 2 - 14 = 16 \\
U_2 &= n_1\, n_2 + n_2\, (n_2 + 1) \,/\, 2 - R_2 && (2.11)\\
&= 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \,/\, 2 - 31 = 4
\end{aligned}
$$

もし，第 1 群の方が小さな代表値を持つなら，R_1 は小さく，U_1 は大きくなる。
統計数値表を引く都合上，検定統計量は $U_0 = \min\,(U_1, U_2) = 4$ とする。

1. **ケース数が小さい場合**

   表 2.2 のような統計数値表[*4] を参照して[*5]，
   - $U_0 >$ 棄却限界値のとき，帰無仮説を採択する。「2 群の代表値に差はない」。
   - $U_0 \leq$ 棄却限界値のとき，帰無仮説を棄却する。「2 群の代表値に差がある」。

   表 2.1 の計算例では $U_0 = 4$ であり，$n_1 = 4$，$n_2 = 5$ のときの棄却限界値は 1 なので，帰無仮説を採択することになる。

2. **ケース数が大きい場合**

   検定統計量 U の平均値は $E(U) = n_1\, n_2 \,/\, 2$，分散は $V(U) = n_1\, n_2\, (n + 1) \,/\, 12$ ゆえ，（2.12）式の Z_0 は，正規分布に従う。

   $$Z_0 = \frac{|\, U - E(U)\,|}{\sqrt{V(U)}} \tag{2.12}$$

   有意確率を $P_0 = \Pr\{Z \geq Z_0\}$ とすると，
   - $P_0 > \alpha$ のとき，帰無仮説を採択する。「2 群の代表値に差はない」。
   - $P_0 \leq \alpha$ のとき，帰無仮説を棄却する。「2 群の代表値に差がある」。

   同順位がある場合には，（2.12）式中の分散 $V(U)$ を修正しなければならない。同順位となる値が m 種類あり，それぞれの同順位となる値の数（同順位の大きさ）を t_i（$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$）としたとき，分散 $V(U)$ は（2.13）式で表される。

   $$V(U) = \frac{n_1\, n_2}{12\,(n^2 - n)} \left\{ n^3 - n - \sum_{i=1}^{m} (t_i^3 - t_i) \right\} \tag{2.13}$$

表 2.2 は，マン・ホイットニーの U 検定に使用する。2 群のケース数（n_1，n_2）において，計算された U_0 が表の数値より小さいか等しいとき，帰無仮説を棄却する。

例えば，$n_1 = 10$，$n_2 = 12$，$U_0 = 25$ のとき有意水準 5% で両側検定を行うとする。表 2.2 からパーセント点は 29 であることがわかり，$U_0 < 29$ ゆえ帰無仮説を棄却する。

分割表の形式でまとめられたデータの場合

表 2.3 のように記号を定義する。x_i，y_i（$i = 1$，2，…，m）は各群の第 i カテゴリーの観察数とする。

[*4] 統計数値表 S. Siegel: Nonparametric Statistics for the behavioral sciences. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1956.
訳書は，藤本 熙 監訳：ノンパラメトリック統計学, マグロウヒル, 東京, 1983.

[*5] 同順位がある場合には，統計数値表は使用できないので「ケース数が大きい場合」の正規化検定を援用する。ただし，ケース数がある程度大きくなければ近似的な検定結果が得られるにすぎない。

表 2.2　マン・ホイットニーの U 検定の統計量の棄却限界値 $\alpha = 0.05$ の両側検定

	n_2																			
n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	—	—	—	—	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	—	—	—	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14
5	—	—	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	—	—	1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	—	—	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	—	0	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	—	0	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	—	0	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	—	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	—	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	—	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	—	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	69	74	78	83
15	—	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	—	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	—	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99	105
18	—	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	—	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	—	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

表 2.3　$2 \times m$ 分割表の形式でまとめられたデータ

	c_1	c_2	$\cdots$	c_m	合計
第 1 群	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	n_1
第 2 群	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	n_2
合計	t_1	t_2	$\cdots$	t_m	n

第 i カテゴリーに属する $t_i = x_i + y_i$ のケースのとる平均順位 r_i は，

$$r_i = \sum_{j<i} t_j + (t_i + 1)/2 \tag{2.14}$$

であるから，第 1 群に属するケースの順位の和 R_1 は，

$$R_1 = \sum_{j=1}^{m} (r_j \, x_j) \tag{2.15}$$

となる。(2.10) 式により U_1 が求められる。第 2 群に属するケースの順位の和は $U_2 = n_1 \, n_2 - U_1$ である。検定統計量 U_0 は U_1 と U_2 の小さい方とする。

検定統計量 U の平均値は $E(U) = n_1 \, n_2 / 2$，分散 $V(U)$ は (2.13) 式で表される。

2.3　$k \times m$ 分割表の場合

$k \times m$ 分割表の形でまとめられるデータは $2 \times m$ 分割表の場合の拡張である。

2.3.1　k および m 個のカテゴリーの両方ともに順序関係がない場合

“分布の差の検定”，“独立性の検定” を区別したが，実際には以下に示す ‘独立性の検定” である。

2 個の変数 A，B がそれぞれ k 個，m 個のカテゴリーを持つとしたとき，$k \times m$ 個の枡目を持つ集計表を作成する。

表 2.4　$k \times m$ 分割表

	要 因 B						
要因 A	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_m	合計
A_1				O_{1j}			$n_{1\cdot}$
A_2				O_{2j}			$n_{2\cdot}$
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
A_i	O_{i1}	O_{i2}	$\cdots$	O_{ij}	$\cdots$	O_{im}	$n_{i\cdot}$
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
A_k				O_{kj}			$n_{k\cdot}$
合計	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$\cdots$	$n_{\cdot j}$	$\cdots$	$n_{\cdot m}$	n

帰無仮説 H_0:「2 変数は独立である（関連がない）」。

対立仮説 H_1:「2 変数は独立ではない（関連がある）」。

有意水準 α で検定を行う。

$k \times m$ 分割表では必ず両側検定である。片側検定は理論上あり得ない。ただし，2×2 分割表では関連の方向性を決められるので，片側検定もあり得る。

χ^2 検定

表 2.4 のような $k \times m$ 分割表で，変数 A の第 i カテゴリー，変数 B の第 j カテゴリーの観察値を O_{ij} とする。また，$n_{i\cdot}$ を第 i 行の合計，$n_{\cdot j}$ を第 j 列の合計とする。

変数 A が第 i カテゴリーである確率は $n_{i\cdot} / n$，変数 B が第 j カテゴリーである確率は $n_{\cdot j} / n$ である。“2 変数が独立である” という帰無仮説のもとでは，変数 A が第 i カテゴリーであり，かつ，変数 B が第 j カテゴリーである確率は $(n_{i\cdot} / n) \times (n_{\cdot j} / n)$ となる*6。したがって，期待値は，その確率に n を掛けたものになるので，(2.16) 式によって求められる。

$$E_{ij} = (n_{i\cdot} / n) \times (n_{\cdot j} / n) \times n = n_{i\cdot}\, n_{\cdot j} / n \tag{2.16}$$

ちなみに，“各群の分布が等しい” という帰無仮説のもとでの期待値は，全群をプールしたときの分布に基づいて求める。すなわち，B_j の相対度数（確率）が $n_{\cdot j} / n$ であるとして，A_i 群の期待値が $(n_{\cdot j} / n) \times n_{i\cdot}$ であるとする。しかし，これは (2.16) 式と結果的には同じである。

全ての枡目について $(O_{ij} - E_{ij})^2 / E_{ij}$ の合計をとったものを χ_0^2 とすれば，χ_0^2 は自由度が $(k-1)(m-1)$ の χ^2

*6 確率における独立性の法則

分布に従う。

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} (O_{ij} - E_{ij})^2 \,/\, E_{ij} \tag{2.17}$$

有意確率を $P_0 = \Pr\{\chi^2 \geq \chi_0^2\}$ とすると，

- $P_0 > \alpha$ のとき，帰無仮説を採択する。「2 変数は独立である（関連がない）」。
- $P_0 \leq \alpha$ のとき，帰無仮説を棄却する。「2 変数は独立ではない（関連がある）」。

対数尤度比検定

χ^2 検定に代わるものとして，対数尤度比による検定がある[*7]。

$$G = 2\left\{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} O_{ij} \ln O_{ij} - \sum_{j=1}^{m} n_{\cdot j} \ln n_{\cdot j} - \sum_{j=1}^{m} n_{i\cdot} \ln n_{i\cdot} + n \ln n\right\} \tag{2.18}$$

G も自由度が（$k-1$）（$m-1$）の χ^2 分布に従う。解釈は χ^2 検定の場合と同じである。

多くの場合，χ^2 検定による検定結果と対数尤度比による検定結果はほぼ同じになるが，どれか 1 つの桝目でも，$|O_{ij} - E_{ij}| < E_{ij}$ ならば対数尤度比による検定を採用したほうがよい（結果が一致しない場合には，対数尤度比による検定結果を採用したほうがよい）。

独立性の検定としての χ^2 検定の注意点

以下のいずれかに該当する分割表に対して χ^2 検定を行ったり，χ^2 値から導き出される関連性の指標を用いる場合には注意が必要である[*8]。

1. 期待値が 1 未満の桝目が 1 つでもある。
2. 期待値が 5 未満の桝目が全体の桝目の数の 20 % 以上ある。

このような場合には，カテゴリーを併合する。あるいは，カテゴリーが併合できないような場合には，他の検定手法の適用の可能性を検討すべきである（第 3 章参照）。いずれも不可能な場合には，結果の解釈・適用において十分な検討が必要である[*9]。

検定結果が有意になるように（あるいは，逆に有意にならないように）カテゴリーの分割方法（分割点）を変えたり，カテゴリーの併合を行ったりしてはいけない。

2.3.2 k あるいは m 個のカテゴリーのいずれかに順序関係がある場合

順序関係のない方のカテゴリーが “群” を表すものと考える（以下では k 群の場合を考える）。ここでは，クラスカル・ウォリス検定を取り上げる。

帰無仮説 H_0: 「各群の代表値に差はない」。

対立仮説 H_1: 「各群の代表値に差がある」。

有意水準 α で両側検定を行う（片側検定は定義できない）。

[*7] Wilks, S. S.: The likelihood test of independence in contingency tables. *Ann. Math. Statist.*, **6**, 190–196, 1935.

[*8] Cochran, W. G.: Some methods for strengthening the common χ^2 tests. *Biometrics*, **10**, 417-451, 1954.

[*9] χ^2 検定を行おうとする限りカテゴリーを併合することが要求される。しかし，カテゴリーの併合は情報の損失をもたらす。結論としては，カテゴリーの併合をする必要のない検定手法を選ぶべきなのである。

原データを用いる方法

k 群の標本において，各群のケース数を n_j（$j = 1, 2, \ldots, k$），$n = \sum n_j$ とする。n 個の観測値を全てこみにして小さい方から順位をつける（同順位がある場合には平均順位をつける）。第 j 群の第 i ケースの順位を r_{ij} とし，各群の順位の和を $R_j = \sum r_{ij}$ とする（$\sum R_j = n(n+1)/2$）。

$$S_x = \frac{12\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\frac{R_j^2}{n_j}}{n(n+1)} - 3(n+1) \tag{2.19}$$

データが大きい場合には，S_x は自由度が $k-1$ の χ^2 分布に従う（近似される）。

同順位が多い場合には，検定統計量 S_x の修正が必要である。m 種類の同順位があったとき，それぞれの同順位の個数を t_j（$j = 1, 2, \ldots, m$）とする（例えば，順位が 5 となるものが 4 個，順位が 11 となるものが 5 個あった場合には，$m = 2$，$t_1 = 4$，$t_2 = 5$）。

まず，(2.20) 式により修正項 C を求め，

$$C = 1 - \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}(t_j^3 - t_j)}{n(n^2-1)} \tag{2.20}$$

(2.19) 式の S_x を修正項で除して同順位を補正する。

$$S_0 = S_x / C \tag{2.21}$$

データが大きい場合には，S_0 は，自由度が $k-1$ の χ^2 分布に従う（近似される）。有意確率を $P_0 = \Pr\{\chi^2 \geq S_0\}$ とすると，

- $P_0 > \alpha$ のとき，帰無仮説を採択する。「代表値に差はない」。
- $P_0 \leq \alpha$ のとき，帰無仮説を棄却する。「代表値に差がある」。

群の数が 3 または 4 で全ケース数が少ない場合には，統計数値表[*10] を参照すれば正確な検定結果が得られる。

分割表の形式でまとめられたデータの場合

表 2.5 のように記号を定義する。x_{ij}（$i = 1, 2, \ldots, k$；$j = 1, 2, \ldots, m$）は第 i 群の第 j カテゴリーの観察数とする。

表 2.5　$k \times m$ 分割表の形式でまとめられたデータ

	c_1	c_2	$\cdots$	c_m	合計
第 1 群	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1m}	n_1
:					
第 i 群	x_{i1}	x_{i2}	$\cdots$	x_{im}	n_i
:					
第 k 群	x_{k1}	x_{k2}	$\cdots$	x_{km}	n_k
合計	t_1	t_2	$\cdots$	t_m	n

[*10] 統計数値表編集委員会: 簡約統計数値表. 日本規格協会，東京，1984.

第 j カテゴリーに属する $t_j = \sum_{i=1}^{k} x_{ij}$ のケースのとる平均順位 r_j は，

$$r_j = \sum_{i<j} t_i + (t_j + 1)/2 \tag{2.22}$$

であるから，第 i 群に属するケースの順位の和 R_i は，

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} (r_j x_j) \tag{2.23}$$

となる。(2.19)，(2.20)，(2.21) 式により S_0 が求められる。

第 3 章

分割表に基づく検定

一般の $k \times m$ 分割表の形式で与えられる加工データに基づいて，さまざまなノンパラメトリック検定を行うことができる。

- 正確な確率を与えるマン・ホイットニー検定[*1]
- 正確な確率を与えるクラスカル・ウォリス検定
- $k \times m$ 分割表の独立性の検定（フィッシャーの正確確率法の拡張）

これらの検定手法は全て，分割表の形式でまとめられたデータに基づくものであり，考え方は Fisher の正確確率検定（20 ページ参照）の場合と同じである。

有意確率は以下のようにして求める。

1. 観察された分割表において，それぞれの検定統計量 S_0 を求める。
   マン・ホイットニー検定，クラスカル・ウォリス検定の場合には，同順位が非常に多い場合に対応する（同順位を補正した検定統計量を求めなければならない）。また，$k \times m$ 分割表の独立性の検定の場合には χ^2 値を S_0 とする。
2. 周辺和 $n_{\cdot 1}, \cdots, n_{\cdot m}$ および $n_{1\cdot}, \cdots, n_{k\cdot}$ を固定したときに得られる全ての分割表を対象にする。

表 3.1　$k \times m$ 分割表

行	列						合計
	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_m	
A_1				O_{1j}			$n_{1\cdot}$
A_2				O_{2j}			$n_{2\cdot}$
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
A_i	O_{i1}	O_{i2}	$\cdots$	O_{ij}	$\cdots$	O_{im}	$n_{i\cdot}$
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
A_k				O_{kj}			$n_{k\cdot}$
合計	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$\cdots$	$n_{\cdot j}$	$\cdots$	$n_{\cdot m}$	n

表 3.1 のような分割表の生起確率 p は，（3.1）式のように表される。

$$p = \left[\prod_{i=1}^{k} \frac{n_{i\cdot}\,!}{O_{i1}\,! \cdots O_{im}\,!} \right] \Big/ \frac{n\,!}{n_{\cdot 1}\,! \cdots n_{\cdot m}\,!} \tag{3.1}$$

[*1] ミッドランクスコア以外の任意のスコアに基づく検定も行うことができる。

これら全ての分割表に対して検定統計量 S_i を計算し，S_0 より極端な検定統計量が得られる分割表の生起確率 p の合計をとり P_0 とする。

3. 有意確率は，P_0 であるから，有意水準 α で検定を行うとき，
   - $P_0 > \alpha$ のとき，帰無仮説を採択する。
   - $P_0 \leq \alpha$ のとき，帰無仮説を棄却する。

3.1 フィッシャーの正確確率検定

フィッシャーの正確確率検定（Fisher's exact test）*2は，2 変数 A，B のそれぞれが 2 つのカテゴリーを持つようなとき，2×2 分割表（クロス集計表）の形式でデータを集計し，2 変数間の独立性の検定を行うものである。

独立性の検定は，9 ページに示すようにして行うが，2×2 分割表の 4 つの桝目のいずれかの期待値が 5 以下のときには不適当である*3。

2 変数 A，B についての分割表を表 1.1 のように定義する。2 群の比率の差の場合には要因 A（または要因 B）が群になる。

帰無仮説 H_0:「2 要因は独立である」，または「比率に差がない」

対立仮説 H_1:「2 要因は独立でない」，または「比率に差がある」

有意水準 α で両側検定を行う。「比率に差があるかどうか」の検定は片側検定も可能である*4。

4 つの桝目の数値が特定の値であるような分割表が得られる確率は（3.2）式のように定義される。

$$p = \frac{{}_eC_a \times {}_fC_c}{{}_nC_g} = \frac{e!\,f!\,g!\,h!}{n!\,a!\,b!\,c!\,d!} \tag{3.2}$$

（3.2）式の導き方を表 1.1 の例を解析してみよう。

1. まず，“甘いものが好き” な 17 人から 13 人を取り出す取り出し方は ${}_{17}C_{13} = 2380$ 通りある。
2. 同様に，“甘いものが嫌い” な 20 人から 6 人を取り出す取り出し方は ${}_{20}C_6 = 38760$ 通りある。
3. “甘いものが好き” なのと “甘いものが嫌い” なのは “独立事象” なので，“甘いものが好き” な 17 人から 13 人，“甘いものが嫌い” な 20 人から 6 人を取り出す取り出し方は，${}_{17}C_{13} \times {}_{20}C_6 = 2380 \times 38760 = 92248800$ 通りあることになる。
4. ここで，全体の人数 37 人から $13 + 6 = 19$ 人を取り出す取り出し方は，${}_{37}C_{19} = 17672631900$ 通りある。
5. したがって，表 1.1 のような 2×2 分割表の生起確率は，

$$p = \frac{{}_{17}C_{13} \times {}_{20}C_6}{{}_{37}C_{19}} = 2380 \cdot 38760\,/\,17672631900 = 0.00522$$

であると計算できる。

周辺度数 e，f，g，h を固定したとき，4 つの桝目のどれか 1 つを決めれば，残りの桝目は自動的に決る*5。例え

---

*2 多くの教科書では「フィッシャーの直接確率法」とされているが，検定手続から考えても，“exact test” の訳としては不適当である。ここでは「フィッシャーの正確確率検定」と呼ぶことにする。

*3 本検定は「期待値が小さい」場合に推奨される。教科書によっては「4 つのうちのどれかの桝目の “観察値” が 5 以下のときに」と書かれているが「観察値が」ではなく正しくは「期待値が」である。Cochran は，「2×2 分割表の場合には，（1）全ケース数が 20 以下のとき，（2）全ケース数が 20 〜 40 のときで期待値のうち最も小さいものが 5 以下のとき，フィッシャーの正確確率検定を使う」ことを勧めている。ちなみに，彼はさらに「全ケース数が 40 以上の場合には連続性の補正をした χ^2 検定を行う」と書いているが，ケース数が大きい場合にもフィッシャーの正確確率検定を使ってもかまわない。

Cochran, W. G.: Some methods for strengthening the common χ^2 tests. *Biometrics*, **10**, 417-451, 1954.

*4 多くの教科書には片側検定の仕方が書いてある。フィッシャーの正確確率検定は本来片側検定として提案されたものである。これらの教科書に載っている他の検定の多くは両側検定なので，（フィッシャーの正確確率検定は片側検定であると明記していないことが多いせいもあるが）両側検定だと思い込んでいる人も少なくない。両側検定について記述がある場合にも，片側検定の確率を 2 倍すればよいとされている場合がある。しかし，周辺度数が $e \neq f$（または $g \neq h$）の場合には分布が対称でないので，この方法は誤っている（表 3.3 参照）。

*5 この性質があるため，全ての可能な分割表を生成するのは手計算でもできる程度に容易である。

表 3.2 2×2 分割表

甘いもの	虫歯 あり	なし	合計
好き	0	17	17
嫌い	19	1	20
合計	19	18	37

甘いもの	虫歯 あり	なし	合計
好き	1	16	17
嫌い	18	2	20
合計	19	18	37

甘いもの	虫歯 あり	なし	合計
好き	2	15	17
嫌い	17	3	20
合計	19	18	37

:

:

甘いもの	虫歯 あり	なし	合計
好き	15	2	17
嫌い	4	16	20
合計	19	18	37

甘いもの	虫歯 あり	なし	合計
好き	16	1	17
嫌い	3	17	20
合計	19	18	37

甘いもの	虫歯 あり	なし	合計
好き	17	0	17
嫌い	2	18	20
合計	19	18	37

ば，a をいろいろと変えることによって，表 3.2 のような分割表が得られる。

それぞれの分割表に対して（3.2）式により生起確率を求め，表 3.3 のようにまとめる。

それぞれの分割表が得られる確率 P_a を計算できる。観察された 2×2 分割表の生起確率を P_o とする。また，2 要因の関連の強さの指標として，$ad-bc$ を定義し，それぞれに対応したものを S_a，S_o とする。

1. **片側検定**

   得られた分割表のうち，観察された分割表より極端な側の分割表（S_a，S_o が同符号でかつ $|S_a| \geq |S_o|$）の生起確率を合計したものを P とする。

   - $P > \alpha$ のとき，帰無仮説を採択する。「2 要因は独立である」。
   - $P \leq \alpha$ のとき，帰無仮説を棄却する。「2 要因は独立ではない」。

   表 3.3 において，観察された表を含めてそれよりも極端な側の分割表は，$a = 13$，14，15，16，17 の 5 つの表である。したがって，

$$\begin{aligned} P &= P_{13}+P_{14}+P_{15}+P_{16}+P_{17} \\ &= 0.005219867676+0.000596556306+0.000037284769+0.000001096611+0.0000000 1075 \\ &= 0.0058548 \end{aligned} \tag{3.3}$$

   となり，帰無仮説は棄却される。

2. **両側検定**

   得られた分割表のうち，観察された分割表より極端な側の分割表（$|S_a| \geq |S_o|$）の生起確率を合計したものを P とする。

   - $P > \alpha$ のとき，帰無仮説を採択する。「2 要因は独立である」。
   - $P \leq \alpha$ のとき，帰無仮説を棄却する。「2 要因は独立ではない」。

   表 3.3 において，観察された表を含めてそれよりも極端な側の分割表は，$a = 0$，1，2，3，4，13，14，15，16，17 の 10 個の表である。したがって，

$$\begin{aligned} P &= P_0+P_1+P_2+P_3+P_4+P_{13}+P_{14}+P_{15}+P_{16}+P_{17} \\ &= 0.000000001132+0.000000182768+0.000008772887+0.000186423846+0.002087947070 \\ &+ 0.005219867676+0.000596556306+0.000037284769+0.000001096611+0.00000001075 \\ &= 0.0081381 \end{aligned} \tag{3.4}$$

表 3.3　分割表の生起確率

a	b	c	d	$ad-bc$		分割表の生起確率	累積確率 1	累積確率 2
0	17	19	1	-323	@	0.000000001132	0.000000001132	1.000000000000
1	16	18	2	-286	@	0.000000182768	0.000000183900	0.999999998868
2	15	17	3	-249	@	0.000008772887	0.000008956787	0.999999816100
3	14	16	4	-212	@	0.000186423846	0.000195380633	0.999991043213
4	13	15	5	-175	@	0.002087947070	0.002283327703	0.999804619367
5	12	14	6	-138		0.013571655957	0.015854983660	0.997716672297
6	11	13	7	-101		0.054286623828	0.070141607487	0.984145016340
7	10	12	8	-64		0.138624771560	0.208766379047	0.929858392513
8	9	11	9	-27		0.231041285933	0.439807664981	0.791233620953
9	8	10	10	10		0.254145414527	0.693953079507	0.560192335019
10	7	9	11	47		0.184833028747	0.878786108254	0.306046920493
11	6	8	12	84		0.088215763720	0.967001871974	0.121213891746
12	5	7	13	121		0.027143311914	0.994145183887	0.032998128026
$\underline{13}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$	$\underline{14}$	158	@	0.005219867676	0.999365051563	0.005854816113
14	3	5	15	195	@	0.000596556306	0.999961607869	0.000634948437
15	2	4	16	232	@	0.000037284769	0.999998892638	0.000038392131
16	1	3	17	269	@	0.000001096611	0.999999989249	0.000001107362
17	0	2	18	306	@	0.000000010751	1.000000000000	0.000000010751

となり，帰無仮説は棄却される。

3.2　マン・ホイットニーの U 検定

表 3.4 のような $2 \times m$ 分割表に対して，マン・ホイットニーの U 検定に基づく正確確率検定を適用する場合を考える。

観察された分割表におけるマン・ホイットニーの U 統計量は，0.04286 である。

次に，周辺和を固定して全ての可能な分割表を探索する[*6]。表 3.5 の左側に第 1 群の度数のみを示す。それぞれの度数分布表に対して，その生起確率とマン・ホイットニーの U 統計量を求める。

片側検定の場合には，観察された度数分布表と同じ方向でそれに対する U 統計量より小さいか等しい U 値を持つ分割表は第 1 群の度数が（c_1，c_2，c_3）＝（2，2，0）のものだけであるので有意確率は 0.04286 になり，帰無仮説は棄却される。

両側検定の場合には，観察された度数分布表に対する U 統計量より小さいか等しい U 値を持つ分割表は第 1 群の度数が（c_1，c_2，c_3）＝（2，2，0），（0，1，3）の二つなので有意確率は 0.04286 + 0.04286 = 0.08571 になり，帰無仮説は採択される。

同順位を補正したマン・ホイットニーの U 検定によると，観察された分割表における U 統計量は 1 であり，その期待値が 8，分散が 10.7143 であることから，正規得点は $Z_0 = |1-8| / \sqrt{10.7143} = 2.13854$ となり，正規分布による近似の結果 $P_0 = \Pr\{Z \geq 3.13854\} = 0.03247$ を得る。有意水準 5 % のもとで両側検定を行うとすれば，帰

[*6] $2 \times m$ 分割表の場合には $m-1$ 個の桝目を決定する必要があり，フィッシャーの正確確率検定のときほど簡単ではない。

表 3.4 正確確率検定を適用する $2 \times m$ 分割表の例

	c_1	c_2	c_3	合計
第 1 群	2	2	0	4
第 2 群	0	1	3	4
合計	2	3	3	8

表 3.5 周辺和を固定したときの全ての可能な $2 \times m$ 分割表と関連情報

c_1	c_2	c_3	p	U
2	2	0	0.04286	1.0
1	3	0	0.02857	3.5
2	1	1	0.12857	4.0
1	2	1	0.25714	6.5
0	3	1	0.04286	7.0
2	0	2	0.04286	7.0
1	1	2	0.25714	6.5
0	2	2	0.12857	4.0
1	0	3	0.02857	3.5
0	1	3	0.04286	1.0

無仮説は棄却される。

しかし，正確な有意確率は前述の通り 0.08571 であり，帰無仮説は採択される。

両者の食い違いは重大なものとなる。例題に示したような小標本では正規近似が十分に機能しないこともその原因となっている。

なお，正確な有意確率のほうが必ず大きい（帰無仮説が採択されやすくなる）わけではない。表 3.6 では，同順位を補正したマン・ホイットニーの U 検定の有意確率は 0.06520 であるのに対して，正確な有意確率は 0.04545 となる。

表 3.6 正確確率検定を適用する $2 \times m$ 分割表の例

	c_1	c_2	c_3	合計
第 1 群	1	5	3	9
第 2 群	6	0	2	8
合計	7	5	5	12

マン・ホイットニー検定の場合には，通常は順位をスコアとするが（ミッドランクスコア），各カテゴリーに自然な数値の対応がある場合にはそれを用いることができる。例えば，連続変数をカテゴリー化したような場合には，各カテゴリーの級中心値をスコアとした方がより妥当性が高いであろう。

3.3　クラスカル・ウォリス検定

クラスカル・ウォリス検定はマン・ホイットニーの U 検定の拡張である。検定に使用される統計量の計算方法が異なるだけであり，正確確率検定も同様の手順で行われる[*7]。

3.4　$k \times m$ 分割表の独立性の検定

フィッシャーの正確確率検定の拡張として最も考えやすいものである。統計量としては，独立性の検定に用いられる χ^2 値を使用する。

3.5　全ての可能な分割表の生成法

全ての可能な分割表を生成するためにはコンピュータプログラムによるのが効率的である。

最も簡単なのは 2×2 分割表の場合である。この分割表は自由度が 1 であるので，どれか一つの桝目の数値を決めると，残りの 3 つの桝目の数値が自動的に決まる。

アルゴリズムを疑似言語で記述すると以下のようになる。

	要 因 B		
要因 A	B_1	B_2	合計
A_1	a	b	e
A_2	c	d	f
合計	g	h	n

手順 1.　まず $a = 0$ とする

手順 2.　b，c，d を求める

手順 3.　b，c，d のどれかが負の値になる場合は，手順 6 へ

手順 4.　統計量を計算する

手順 5.　統計量が観察された分割表の統計量より極端の側にあるならば，生起確率を計算し累計する

手順 6.　a を 1 増加させて，$a \leq \min(e, g)$ なら手順 2 へ，そうでなければ終了

手順 2 〜 手順 6 は繰り返し計算であり，1 重のループをなしている。例えば C 言語でこれを記述すると次のように表される。

```
for (a = 0; a ≤ min(e, g); a++) {
   処理
}
```

$2 \times m$ 分割表の場合は自由度が $m - 1$ であるので，$m - 1$ 個の桝目の数値を決めると，残りの桝目の数値が自動的に決まる。

[*7] $k \times m$ 分割表の場合には $(k - 1)(m - 1)$ 個の桝目を決定する必要があり，フィッシャーの正確確率検定のときとは比較にならないほど面倒な手続きになる。

	要因B			
要因A	B_1	B_2	B_3	合計
A_1	a	b	c	d
A_2	e	f	g	h
合計	i	j	k	n

計算の手順は 2×2 分割表の場合には 1 重のループであったが $2 \times m$ 分割表の場合は $m-1$ 重のループになる。例に示した分割表では 2 重ループになる。C 言語では次のようになる。

```
for (a = 0; a ≤ min(d, i); a++) {
    for (b = d−a; b ≤ min(d−a, j); b++) {
        処理
    }
}
```

しかし，このやり方では条件を満たさない分割表も生成されるという無駄がある[*8]のと，m によって個別のプログラムを書かなければならないので一般化しにくいという欠点がある。さらに，$k \times m$ 分割表の場合は自由度が $(k-1) \times (m-1)$ なので更に困難になる。

参考文献

1) Klotz, J. H.: The Wilcoxon, Ties, and the Computer. *JASA*, **61**, 772–87, 1966.
2) Klotz, J. H.: Corrigenda. *JASA*, **62**, 1520–1, 1967.
3) Klotz, J. H.: One–Way Layout for Counts and the Exact Enumeration of the Kruskal–Wallis H distribution with Ties. *JASA*, **72**, 165–9, 1977.
4) レーマン, E. L.: ノンパラメトリックス. 森北出版 p.360.

[*8] 上のプログラムでは，a，b の下限と上限について簡単な効率化を図っているが，十分ではない。

索引

英字

あ

か

さ

た

な

は

ま

ら